УДК 514.75

И. Ю. Бесчастный

(Калининградский государственный технический университет)

СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С ДВОЙСТВЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОСКОСТЕЙ

В многомерном проективном пространстве рассматривается двойственное распределение плоскостей. С помощью приема Лумисте задана связность в ассоциированном с распределением расслоении. Доказано, что объект кривизны данной связности образует тензор, содержащий четыре подтензора.

Ключевые слова: проективное пространство, двойственное распределение, связность, тензор кривизны.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, ... = \overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами:

$$dA = \theta A + \omega^I A_I; \tag{1}$$

$$dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A. \tag{2}$$

Структурные уравнения проективной группы $GP(n)$ запишем в виде:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I; \tag{3}$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \tag{4}$$

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J. \tag{5}$$

Рассмотрим n-параметрическое семейство S_n пар плоскостей (P_m, L_{n-1}), полагая, что m-плоскость P_m принадлежит гиперплоскости L_{n-1}. Семейство S_n назовем двойственным распределением, поскольку паре (P_m, L_{n-1}) двойственна пара (P_{n-m-1}, L_0), причем выполняются условия

$$L_0 \in P_{n-m-1}\,,\; L_0 \notin L_{n-1}\,,\; P_m \cap P_{n-m-1} = \varnothing\,.$$

Когда пара (P_m, L_{n-1}) описывает n-мерное семейство S_n, двойственная пара (P_{n-m-1}, L_0) также описывает n-семейство, которое является распределением (n-m-1)-плоскостей.

Специализируем подвижный репер, помещая вершины $\{A_i, A_\alpha\}$ $(i,... = \overline{1, m+1};\ \alpha,... = \overline{m+2, n})$ на гиперплоскость L_{n-1} и предполагая, что плоскость P_m натянута на совокупность точек $\{A_i\}$. Тогда уравнения (2) запишутся в виде:

$$dA_i = \theta A_i + \omega_i^a A_a + \omega_i^j A_j + \omega_i A; \tag{6}$$

$$dA_a = \theta A_a + \omega_a^b A_b + \omega_a^i A_i + \omega_a A. \tag{7}$$

Из формул (6, 7) видно, что уравнениями стационарности данной пары являются: $\omega_I = 0$, $\omega_i^\alpha = 0$. Выбирая n форм ω_I в качестве базисных, запишем уравнения распределения S_n в виде:

$$\omega_i^a = \Lambda_i^{aJ} \omega_J. \tag{8}$$

Дифференцируя уравнения (8) внешним образом и разрешая по лемме Картана, получим уравнения на компоненты объекта $\Lambda = (\Lambda_i^{\alpha J})$:

$$\Delta\Lambda_i^{\alpha J} + \delta_i^J \omega^\alpha = \Lambda_i^{\alpha JK} \omega_K\,, \quad \Lambda_i^{\alpha[JK]} = 0, \tag{9}$$

где δ_i^J — обобщенный символ Кронекера,

$$\Delta\Lambda_i^{\alpha J} = d\Lambda_i^{\alpha J} + \Lambda_i^{\beta J} \omega_\beta^\alpha + \Lambda_i^{\alpha K} \omega_K^J - \Lambda_k^{\alpha J} \omega_i^k\,.$$

Распишем подробно уравнение (9) с учетом (8):

$$\begin{gathered} \Delta\Lambda_i^{\alpha j} + \Lambda_i^{\alpha\beta} \omega_\beta^j + \delta_i^j \omega^\alpha = \Lambda_i^{\alpha jK} \omega_K\,, \\ \Delta\Lambda_i^{\alpha\beta} = \left(\Lambda_i^{\alpha\beta K} - \Lambda_i^{\alpha j} \Lambda_j^{\beta K}\right) \omega_K\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Утверждение. Фундаментальный объект первого порядка $\Lambda = \left\{ \Lambda_i^{\alpha j}, \Lambda_i^{\alpha\beta} \right\}$ распределения S_n является квазитензором, содержащим тензор $\Lambda_i^{\alpha\beta}$.

Исследование распределения S_n в репере нулевого порядка приводит к разбиению структурных форм $\omega^I, \omega_J^I, \omega_I$ на две совокупности: первичные формы $\omega_I, \omega_i^\alpha$, включающие базисные формы ω_I, и вторичные формы $\omega^I, \omega_j^i, \omega_\alpha^i, \omega_\alpha^\beta$, внешние дифференциалы которых имеют вид:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^a \wedge \omega_a^i; \tag{11}$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^{aJ} \wedge \omega_J; \tag{12}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_j^{iK} \wedge \omega_K; \tag{13}$$

$$D\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega_a^{iJ} \wedge \omega_J; \tag{14}$$

$$D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \omega_\alpha^{\beta J} \wedge \omega_J, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} \omega^{\alpha J} = \Lambda_i^{\alpha J} \omega^i, \ \omega_j^{iK} = -\left(\Lambda_j^{\alpha K} \omega_\alpha^i + \delta_j^i \omega^K + \delta_j^K \omega^i \right), \\ \omega_\alpha^{iJ} = -\delta_\alpha^J \omega^i, \ \omega_\alpha^{\beta J} = \Lambda_i^{\beta J} \omega_\alpha^i - \delta_\alpha^\beta \omega^J - \delta_\alpha^J \omega^\beta . \end{gathered} \tag{16}$$

Получили структурные уравнения (5, 11—15) главного расслоения $G_r(P_n^*)$, базой которого является двойственное проективное пространство P_n^* — пространство гиперплоскостей пространства P_n, а типовым слоем — подгруппа G_r группы $GP(n)$ — подгруппа стационарности пары плоскостей (P_m, L_{n-1}), причем $r = n^2 + n - (m+1)(n-m-1)$.

Расслоение $G_r(P_n^*)$, ассоциированное с распределением S_n, имеет четыре фактор-расслоения над той же базой со следующими структурными уравнениями:

1) (5, 13) — расслоение плоскостных линейных реперов $L_{(m+1)^2}(P_n^*)$ с типовым слоем $L_{(m+1)^2} = GL(m+1)$ — линейной фактор-группой, действующей в пространстве P_m;

2) (5, 15) — расслоение нормальных линейных реперов $L_{(n-m-1)^2}(P_n^*)$ с типовым слоем $L_{(n-m-1)^2} = GL(n-m-1)$ — линейной фактор-группой, действующей в фактор-пространстве $\mathrm{P}_{n-m-2} = L_{n-1} / P_m$;

3) (5, 12, 15) — расслоение аффинных реперов $A_q(P_n^*)$, где $q = (m-n)(m-n-1)$, с типовым слоем $A_q = GA(n-m-1)$ — аффинной фактор-группой, действующей в аффинном пространстве $\mathrm{P}_{n-m-1} \setminus \mathrm{P}_{n-m-2}$, где $\mathrm{P}_{n-m-1} = P_n / P_m$;

4) (5, 13—15) — линейно-групповое фактор-расслоение $H_p(P_n^*)$, где $p = n^2 - (m+1)(n-m-1)$, с типовым слоем H_p — линейной фактор-группой группы G_r [1].

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *С двойственным распределением S_n в проективном пространстве P_n ассоциируется главное расслоение $G_r(P_n^*)$, которое имеет два простейших [2] фактор-расслоения линейных реперов $L_{(m+1)^2}(P_n^*)$, $L_{(n-m-1)^2}(P_n^*)$ и два простых [2] фактор-расслоения $A_q(P_n^*)$ и $H_p(P_n^*)$.*

Зададим фундаментально-групповую связность в расслоении $G_r(P_n^*)$ приемом Лумисте [3] с помощью форм:

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}^i = \omega^i + \Gamma^{iJ}\omega_J,\ \tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha + \Gamma^{\alpha I}\omega_I,\ \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^{iK}_j\omega_K, \\ \tilde{\omega}^i_\alpha = \omega^i_\alpha + \Gamma^{iJ}_\alpha\omega_J,\ \tilde{\omega}^\beta_\alpha = \omega^\beta_\alpha + \Gamma^{\beta I}_\alpha\omega_I.\end{gathered} \tag{17}$$

Продифференцируем эти формы с помощью структурных уравнений (5, 11—15) и получим:

$$\begin{gathered}D\tilde{\omega}^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^\alpha \wedge \omega^i_\alpha + (d\Gamma^{iJ} + \Gamma^{iK}\omega^J_K) \wedge \omega_J, \\ D\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + (d\Gamma^{\alpha I} + \Gamma^{\alpha J}\omega^I_J + \omega^{\alpha I}) \wedge \omega_I, \\ D\tilde{\omega}^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + (d\Gamma^{iK}_j + \Gamma^{iL}_j\omega^K_L + \omega^{iK}_j) \wedge \omega_K,\end{gathered} \tag{18}$$

$$D\tilde{\omega}^i_\alpha = \omega^j_\alpha \wedge \omega^i_j + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^i_\beta + (d\Gamma^{iJ}_\alpha + \Gamma^{iK}_\alpha \omega^J_K + \omega^{iJ}_\alpha) \wedge \omega_J ,$$

$$D\tilde{\omega}^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + (d\Gamma^{\beta I}_\alpha + \Gamma^{\beta J}_\alpha \omega^I_J + \omega^{\beta I}_\alpha) \wedge \omega_I .$$

Выразим вторичные формы из равенств (17) и подставим их в слагаемые (18), не содержащие базисных форм:

$$\begin{gathered}
\omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^\alpha \wedge \omega^i_\alpha = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\alpha - \tilde{\omega}^j \wedge \Gamma^{iL}_j \omega_L - \\
-\Gamma^{jK}\omega_K \wedge \tilde{\omega}^i_j + \Gamma^{jK}\omega_K \wedge \Gamma^{iL}_j \omega_L - \Gamma^{\alpha J}\omega_J \wedge \tilde{\omega}^i_\alpha - \\
-\tilde{\omega}^\alpha \wedge \Gamma^{iK}_\alpha \omega_K + \Gamma^{\alpha J}\omega_J \wedge \Gamma^{iK}_\alpha \omega_K , \\
\omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta = \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\beta - \Gamma^{\beta I}\omega_I \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\beta - \tilde{\omega}^\beta \wedge \Gamma^{\alpha J}_\beta \omega_J + \\
+\Gamma^{\beta I}\omega_I \wedge \Gamma^{\alpha J}_\beta \omega_J , \qquad (19) \\
\omega^j_\alpha \wedge \omega^i_j + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^i_\beta = \tilde{\omega}^j_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\beta - \Gamma^{jK}_\alpha \omega_K \wedge \tilde{\omega}^i_j - \\
-\tilde{\omega}^j_\alpha \wedge \Gamma^{iL}_j \omega_L + \Gamma^{jK}_\alpha \omega_K \wedge \Gamma^{iL}_j \omega_L - \Gamma^{\beta J}_\alpha \omega_J \wedge \tilde{\omega}^i_\beta - \\
-\tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \Gamma^{iK}_\beta \omega_K + \Gamma^{\beta J}_\alpha \omega_J \wedge \Gamma^{iK}_\beta \omega_K , \\
\omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma = \tilde{\omega}^\gamma_\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta_\gamma - \Gamma^{\gamma I}_\alpha \omega_I \wedge \tilde{\omega}^\beta_\gamma - \tilde{\omega}^\gamma_\alpha \wedge \Gamma^{\beta J}_\gamma \omega_J + \\
+\Gamma^{\gamma I}_\alpha \omega_I \wedge \Gamma^{\beta J}_\gamma \omega_J .
\end{gathered}$$

В слагаемых, не являющихся внешними произведениями преобразованных слоевых форм и внешними произведениями базисных форм, вернемся к исходным вторичным формам и подставим результат в структурные уравнения (18):

$$\begin{gathered}
D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\alpha - (\Gamma^{lJ}\Gamma^{iK}_l + \Gamma^{\alpha J}\Gamma^{iK}_\alpha)\omega_J \wedge \omega_K + \\
+(\Delta\Gamma^{iJ} - \Gamma^{iJ}_k \omega^k + \Gamma^{\alpha J}\omega^i_\alpha - \Gamma^{iJ}_\alpha \omega^\alpha) \wedge \omega_J , \\
D\tilde{\omega}^\alpha = \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\beta - \Gamma^{\beta I}\Gamma^{\alpha J}_\beta \omega_I \wedge \omega_J + (\Delta\Gamma^{\alpha I} - \Gamma^{\alpha I}_\beta \omega^\beta + \omega^{\alpha I}) \wedge \omega_I , \\
D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k - \Gamma^{mK}_j \Gamma^{iL}_m \omega_K \wedge \omega_L + (\Delta\Gamma^{iK}_j + \omega^{iK}_j) \wedge \omega_K , \qquad (20) \\
D\tilde{\omega}^i_\alpha = \tilde{\omega}^j_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\beta - (\Gamma^{lJ}_\alpha \Gamma^{iK}_l + \Gamma^{\beta J}_\alpha \Gamma^{iK}_\beta)\omega_J \wedge \omega_K + \\
+(\Delta\Gamma^{iJ}_\alpha - \Gamma^{iJ}_k \omega^k_\alpha + \Gamma^{\beta J}_\alpha \omega^i_\beta + \omega^{iJ}_\alpha) \wedge \omega_J , \\
D\tilde{\omega}^\beta_\alpha = \tilde{\omega}^\gamma_\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta_\gamma - \Gamma^{\gamma I}_\alpha \Gamma^{\beta J}_\gamma \omega_I \wedge \omega_J + (\Delta\Gamma^{\beta I}_\alpha + \omega^{\beta I}_\alpha) \wedge \omega_I .
\end{gathered}$$

Согласно теореме Картана — Лаптева формы (17) определяют фундаментально-групповую связность в главном расслоении $G_r(P_n^*)$ лишь тогда, когда их внешние дифференциалы выражаются через внешние произведения этих же форм и внешние произведения базисных форм. Из структурных уравнений (20) видно, что для задания связности необходимо задать поле объекта связности $\varGamma = \left\{\varGamma^{iJ}, \varGamma^{\alpha I}, \varGamma_j^{iK}, \varGamma_\alpha^{iJ}, \varGamma_\alpha^{\beta I}\right\}$ со следующими дифференциальными уравнениями его компонент:

$$\begin{gathered}
\Delta\varGamma^{iJ} - \varGamma_k^{iJ}\omega^k + \varGamma^{\alpha J}\omega_\alpha^i - \varGamma_\alpha^{iJ}\omega^\alpha = \varGamma^{iJK}\omega_K, \\
\Delta\varGamma^{\alpha I} - \varGamma_\beta^{\alpha I}\omega^\beta + \omega^{\alpha I} = \varGamma^{\alpha IJ}\omega_J, \\
\Delta\varGamma_j^{iK} + \omega_j^{iK} = \varGamma_j^{iKL}\omega_L, \\
\Delta\varGamma_\alpha^{iJ} - \varGamma_k^{iJ}\omega_\alpha^k + \varGamma_\alpha^{\beta J}\omega_\beta^i + \omega_\alpha^{iJ} = \varGamma_\alpha^{iJK}\omega_K, \\
\Delta\varGamma_\alpha^{\beta I} + \omega_\alpha^{\beta I} = \varGamma_\alpha^{\beta IJ}\omega_J.
\end{gathered} \tag{21}$$

Отсюда с учетом (16) вытекает

Теорема 2. *Объект фундаментально-групповой связности* $\varGamma = \left\{\varGamma^{iJ}, \varGamma^{\alpha I}, \varGamma_j^{iK}, \varGamma_\alpha^{iJ}, \varGamma_\alpha^{\beta I}\right\}$, *задающий связность в главном расслоении* $G_r(P_n^*)$, *ассоциированном с двойственным распределением* S_n, *содержит два простейших подобъекта: объект плоскостной линейной связности* $\varGamma_1 = \left\{\varGamma_j^{iK}\right\}$, *объект нормальной линейной связности* $\varGamma_2 = \left\{\varGamma_\alpha^{\beta I}\right\}$, *объекты полной аффинной связности* $\varGamma_3 = \left\{\varGamma^{\alpha I}, \varGamma_\alpha^{\beta I}\right\}$ *и линейно-групповой связности* $\varGamma_4 = \left\{\varGamma_j^{iK}, \varGamma_\alpha^{iJ}, \varGamma_\alpha^{\beta I}\right\}$, *задающие связности в фактор-расслоениях соответственно* $L_{(m+1)^2}(P_n^*)$, $L_{(n-m-1)^2}(P_n^*)$, $A_q(P_n^*)$, $H_p(P_n^*)$. *Объект связности* $\varGamma$ *образует квазитензор лишь в совокупности с фундаментальным квазитензором* $\varLambda$. *Квазитензор* $\{\varGamma, \varLambda\}$ *содержит четыре простых подквазитензора* $\{\varGamma_1, \varLambda\}$, $\{\varGamma_2, \varLambda\}$, $\{\varGamma_3, \varLambda\}$, $\{\varGamma_4, \varLambda\}$.

Структурные уравнения (20) с учетом (21) перепишем в виде:

$$D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\alpha + R^{iJK}\omega_J \wedge \omega_K\,, \qquad (22)$$

$$D\tilde{\omega}^\alpha = \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\beta + R^{\alpha IJ}\omega_I \wedge \omega_J\,, \qquad (23)$$

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^{iKL}_j\omega_K \wedge \omega_L\,, \qquad (24)$$

$$D\tilde{\omega}^i_\alpha = \tilde{\omega}^j_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \tilde{\omega}^i_\beta + R^{iJK}_\alpha\omega_J \wedge \omega_K\,, \qquad (25)$$

$$D\tilde{\omega}^\beta_\alpha = \tilde{\omega}^\gamma_\alpha \wedge \tilde{\omega}^\beta_\gamma + R^{\beta IJ}_\alpha\omega_I \wedge \omega_J\,, \qquad (26)$$

где компоненты объекта кривизны $R=\left\{R^{iJK}, R^{\alpha IJ}, R^{iKL}_j, R^{iJK}_\alpha, R^{\beta IJ}_\alpha\right\}$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
R^{iJK} &= -(\Gamma^{l[J}\Gamma^{iK]}_l + \Gamma^{\alpha[J}\Gamma^{iK]}_\alpha + \Gamma^{i[JK]})\,,\\
R^{\alpha IJ} &= -(\Gamma^{\beta[I}\Gamma^{\alpha J]}_\beta + \Gamma^{\alpha[IJ]})\,,\\
R^{iKL}_j &= -(\Gamma^{m[K}_j\Gamma^{iL]}_m + \Gamma^{i[KL]}_j)\,,\\
R^{iJK}_\alpha &= -(\Gamma^{l[J}_\alpha\Gamma^{iK]}_l + \Gamma^{\beta[J}_\alpha\Gamma^{iK]}_\beta + \Gamma^{i[JK]}_\alpha)\,,\\
R^{\beta IJ}_\alpha &= -(\Gamma^{\gamma[I}_\alpha\Gamma^{\beta J]}_\gamma + \Gamma^{\beta[IJ]}_\alpha)\,.
\end{aligned} \qquad (27)$$

Теорема 3. *Задание фундаментально-групповой связности в ассоциированном расслоении $G_r(P^*_n)$ превращает его в пространство групповой связности $G_{r,n}$ со структурными уравнениями (5, 22—26), которое имеет два простейших фактор-пространства: пространство плоскостной линейной связности $L_{(m+1)^2,n}$ (5, 24) и пространство нормальной линейной связности $L_{(n-m-1)^2,n}$ (5, 26); и два простых фактор-пространства: пространство полной аффинной связности $A_{q,n}$ (5, 23, 26) и пространство линейно-групповой связности $H_{p,n}$ (5, 24—26).*

Найдем дифференциальные сравнения для объекта кривизны. Соотношения на обобщенные символы Кронекера на двойственном распределении S_n имеют вид:

$$\Delta\delta^I_j = \delta^I_\alpha \Lambda^{\alpha K}_j \omega_K\,, \qquad (28)$$

$$\Delta\delta_\alpha^I = \delta_k^I \omega_\alpha^k . \qquad (29)$$

Раскроем в уравнениях (21) оператор Δ, подставим обозначения (16), продифференцируем с помощью структурных уравнений (5, 11—15) и дифференциальных уравнений (8, 9, 28, 29), разрешим по лемме Картана, используем уравнение (8) и результат запишем в виде сравнений по модулю базисных форм ω_I:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma^{iJK} - \Gamma^{lJ}\omega_l^{iK} + \Gamma^{iJ}\omega^K + \Gamma^{iK}\omega^J - \Gamma_l^{iJK}\omega^l + \Gamma^{\alpha JK}\omega_\alpha^i - \\
&-\Gamma^{\alpha J}\omega_\alpha^{iK} - \Gamma_\alpha^{iJK}\omega^\alpha + \Gamma_\alpha^{iJ}\omega^{\alpha K} \equiv 0, \\
&\Delta\Gamma^{\alpha IJ} - \Gamma^{\beta I}\omega_\beta^{\alpha J} + \Gamma^{\alpha I}\omega^J + \Gamma^{\alpha J}\omega^I - \Gamma_\beta^{\alpha IJ}\omega^\beta + \Gamma_\beta^{\alpha I}\omega^{\beta J} + \\
&+\Lambda_k^{\alpha IJ}\omega^k \equiv 0, \\
&\Delta\Gamma_j^{iKL} - \Gamma_j^{mK}\omega_m^{iL} + \Gamma_m^{iK}\omega_j^{mL} + \Gamma_j^{iK}\omega^L + \Gamma_j^{iL}\omega^K - \Lambda_j^{\alpha KL}\omega_\alpha^i + \\
&+\Lambda_j^{\alpha K}\omega_\alpha^{iL} - \delta_\alpha^K \Lambda_j^{\alpha L}\omega^i \equiv 0, \qquad (30) \\
&\Delta\Gamma_\alpha^{iJK} - \Gamma_\alpha^{lJ}\omega_l^{iK} + \Gamma_\alpha^{iJ}\omega^K + \Gamma_\alpha^{iK}\omega^J + \Gamma_\beta^{iJ}\omega_\alpha^{\beta K} - \Gamma_l^{iJK}\omega_\alpha^l + \\
&+\Gamma_l^{iJ}\omega_\alpha^{lK} + \Gamma_\alpha^{\beta JK}\omega_\beta^i - \Gamma_\alpha^{\beta J}\omega_\beta^{iK} \equiv 0, \\
&\Delta\Gamma_\alpha^{\beta IJ} - \Gamma_\alpha^{\gamma I}\omega_\gamma^{\beta J} + \Gamma_\gamma^{\beta I}\omega_\alpha^{\gamma J} + \Gamma_\alpha^{\beta J}\omega^I + \Gamma_\alpha^{\beta I}\omega^J + \Lambda_j^{\beta IJ}\omega_\alpha^j - \\
&-\Lambda_k^{\beta I}\omega_\alpha^{kJ} + \delta_\alpha^I\omega^{\beta J} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Проальтернируем эти сравнения по двум последним индексам:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma^{i[JK]} - \Gamma^{l[J}\omega_l^{iK]} - \Gamma_l^{i[JK]}\omega^l + \Gamma^{\alpha[JK]}\omega_\alpha^i - \Gamma^{\alpha[J}\omega_\alpha^{iK]} - \\
&-\Gamma_\alpha^{i[JK]}\omega^\alpha + \Gamma_\alpha^{i[J}\omega^{\alpha K]} \equiv 0, \\
&\Delta\Gamma^{\alpha[IJ]} - \Gamma^{\beta[I}\omega_\beta^{\alpha J]} - \Gamma_\beta^{\alpha[IJ]}\omega^\beta + \Gamma_\beta^{\alpha[I}\omega^{\beta J]} \equiv 0, \\
&\Delta\Gamma_j^{i[KL]} - \Gamma_j^{m[K}\omega_m^{iL]} + \Gamma_m^{i[K}\omega_j^{mL]} \equiv 0, \qquad (31) \\
&\Delta\Gamma_\alpha^{i[JK]} - \Gamma_\alpha^{l[J}\omega_l^{iK]} + \Gamma_\beta^{i[J}\omega_\alpha^{\beta K]} - \Gamma_l^{i[JK]}\omega_\alpha^l + \Gamma_l^{i[J}\omega_\alpha^{lK]} + \\
&+\Gamma_\alpha^{\beta[JK]}\omega_\beta^i - \Gamma_\alpha^{\beta[J}\omega_\beta^{iK]} \equiv 0, \\
&\Delta\Gamma_\alpha^{\beta[IJ]} - \Gamma_\alpha^{\gamma[I}\omega_\gamma^{\beta J]} + \Gamma_\gamma^{\beta[I}\omega_\alpha^{\gamma J]} \equiv 0 .
\end{aligned}$$

Агрегаты, входящие в выражения (27), удовлетворяют дифференциальным сравнениям:

$$\Delta\left(\Gamma^{l[J}\Gamma_l^{iK]}+\Gamma^{\alpha[J}\Gamma_\alpha^{iK]}\right)\equiv\Gamma_\alpha^{l[J}\Gamma_l^{iK]}\omega^\alpha+\Gamma_m^{l[J}\Gamma_l^{iK]}\omega^m-$$

$$-\Gamma^{l[J}\omega_l^{iK]}+\Gamma_\beta^{\alpha[J}\Gamma_\alpha^{iK]}\omega^\beta-\omega^{\alpha[J}\Gamma_\alpha^{iK]}-\Gamma^{\alpha[J}\Gamma_\alpha^{\beta K]}\omega_\beta^i-$$

$$-\Gamma^{\alpha[J}\omega_\alpha^{iK]},$$

$$\Delta\left(\Gamma^{\beta[I}\Gamma_\beta^{\alpha J]}\right)\equiv-\Gamma^{\beta[I}\omega_\beta^{\alpha J]}+\Gamma_\gamma^{\beta[I}\Gamma_\beta^{\alpha J]}\omega^\gamma-\omega^{\beta[I}\Gamma_\beta^{\alpha J]},$$

$$\Delta\left(\Gamma_j^{m[K}\Gamma_m^{iL]}\right)\equiv-\omega_j^{m[K}\Gamma_m^{iL]}-\Gamma_j^{m[K}\omega_m^{iL]},$$

$$\Delta\left(\Gamma_\alpha^{l[J}\Gamma_l^{iK]}+\Gamma_\alpha^{\beta[J}\Gamma_\beta^{iK]}\right)\equiv\Gamma_m^{l[J}\Gamma_l^{iK]}\omega_\alpha^m-\omega_\alpha^{l[J}\Gamma_l^{iK]}-$$

$$-\Gamma_\alpha^{l[J}\omega_l^{iK]}-\omega_\alpha^{\beta[J}\Gamma_\beta^{iK]}-\Gamma_\alpha^{\beta[J}\Gamma_\beta^{\gamma K]}\omega_\gamma^i-\Gamma_\alpha^{\beta[J}\omega_\beta^{iK]},$$

$$\Delta\left(\Gamma_\alpha^{\gamma[I}\Gamma_\gamma^{\beta J]}\right)\equiv-\omega_\alpha^{\gamma[I}\Gamma_\gamma^{\beta J]}-\Gamma_\alpha^{\gamma[I}\omega_\gamma^{\beta J]}.$$

С помощью этих сравнений и сравнений (31) получим дифференциальные сравнения для компонент (27) объекта $R=\left\{R^{iJK},R^{\alpha IJ},R_j^{iKL},R_\alpha^{iJK},R_\alpha^{\beta IJ}\right\}$:

$$\Delta R^{iJK}-R_\alpha^{iJK}\omega^\alpha-R_l^{iJK}\omega^l+R^{\alpha JK}\omega_\alpha^i\equiv0,\quad \Delta R^{\alpha IJ}-R_\beta^{\alpha IJ}\omega^\beta\equiv0,$$

$$\Delta R_j^{iKL}\equiv0,\quad \Delta R_\alpha^{iJK}+R_\alpha^{\beta JK}\omega_\beta^i-R_l^{iJK}\omega_\alpha^l\equiv0,\quad \Delta R_\alpha^{\beta IJ}\equiv0. \tag{32}$$

Теорема 4. *Объект фундаментально-групповой кривизны* $R=\left\{R^{iJK},\ R^{aIJ},\ R_j^{iKL},\ R_a^{iJK},\ R_a^{bIJ}\right\}$ *является тензором, содержащим два простейших подтензора: тензор плоскостной линейной кривизны* $R_1=\left\{R_j^{iKL}\right\}$, *тензор нормальной линейной кривизны* $R_2=\left\{R_\alpha^{\beta IJ}\right\}$; *и два простых подтензора: тензор полной аффинной кривизны* $R_3=\left\{R^{\alpha IJ},R_\alpha^{\beta IJ}\right\}$, *тензор линейно-групповой кривизны* $R_4=\left\{R_j^{iKL},R_\alpha^{iJK},R_\alpha^{\beta IJ}\right\}$.

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Аффинная, коаффинная и линейная фактор-группы в подгруппе проективной группы// Проблемы мат. и физ. наук: материалы постоянных научных семинаров. Калининград, 2002. С. 38—39.

2. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

3. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении// Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 37. Калининград, 2006. С. 179—187.

I. Beschastnyi

CONNECTIONS ON A BUNDLE, ASSOCIATED WITH DUAL PLANE DISTRIBUTION

In many-dimensional projective space a dual plane distribution is considered. A connection in a bundle associated with given distribution is introduced by Lumiste's way. It is proved, that the curvature object is a tensor, which contains four subtensors.

УДК 514.75

Н. В. Виноградова, О. В. Воротникова, М. В. Кретов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОБ ОДНОМ КОМПЛЕКСЕ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) эллипсоидов. Получены геометрические свойства одного из подклассов рассматриваемого многообразия фигур.

Ключевые слова: эллипсоид, аффинное пространство, комплекс, многообразие, репер, система уравнений Пфаффа, фокальное многообразие, асимптотические линии, индикатриса вектора.

Исследование ведется в репере $R = \{ A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \}$, который характеризуется следующим образом: A — центр эллипсоида q, векторы $\bar{e}_i$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ направлены по тройке сопряженных